随机利率下缴费预定型企业年金支付模型研究

□ 刘晓颖

企业年金是我国多层次养老保险体系的第二层次，对经济社会都有着至关重要的影响。本文主要运用保险精算学以及利息理论中的随机利率分析法，研究了缴费预定型企业年金的支付模型，分析中放开了传统模型中确定利率的假定，采用随机利率，具有一定的现实意义。

一、引言

企业年金是企业根据自身经济能力，为本企业职工建立的旨在提高职工养老保险待遇水平的收入保障计划。在我国三支柱的社会养老保险体系中，企业年金是第二支柱，即企业补充养老保险。2000年，国务院颁布了《关于完善城镇社会保障体系试点方案》将企业补充养老保险正式更名为“企业年金”，并提出企业年金实行完全积累方式，采用缴费预定型方案，年金基金进行市场化运营和管理。缴费预定型是现行企业年金两种基本方案之一，其原理是企业及其职工都按照工资的一定比例缴纳年金保险费，即预先确定缴费水平，计入职工的个人帐户，等到职工退休时候根据帐户内的缴费积累额及投资收入总额来计发养老金。

本文运用精算学方法研究缴费预定型企业年金的支付模型，与传统的确定性模型不同的是本文采用随机利率模型的分析方法。传统确定性模型主要是假定各年的利率与折现因子都相等，这与实际不相符，实际经济由于各方面因素的影响，市场利率经常出现波

多变量金融系统具有明显的波动性、关联性和系统性，其中充斥着非线性、分形及混沌等复杂现象，所以近年来，作为非线性智能预测方法的人工神经网络ANN模型也受到多维金融分析者的普遍青睐，与此同时，非线性领域的混沌预测方法也在逐渐的发展过程中不断完善。事实上，正是预测领域的诸多难题促进了非线性系统理论的发展，混沌理论为原本认为不可预测的复杂系统的预测提供了新的理论与方法途径。人工神经网络ANN方法作为一种有良好性质的非线性方法也已经被应用于金融分析，人工神经网络模型相当于一个黑箱，它将系统的结构隐含于网络的权值中，无论系统模型是何种形式，用于描述这些模型的神经网络结构是不变的，基于这一点，人工神经网络模型具有强大的学习能力和适应能力。

20世纪90年代初，国际上几位诺贝尔奖得主和数学大师提出了经济是一个复杂的演化系统的思路，通过多学科的交叉研究形成了一套复杂系统的一般性理论。随着信息技术的不断发展，利用计算机技术和其它学科知识处理大量的数据进行分析预测已经形成了一个交叉学科。数据挖掘（Data Mining）从庞大的数据库中提取趋势、特征以及相关性等模式，能够更加准确的发现数据之间的相互依存关系，建立更准确的拟和数据模型，人工神经网络方法也可以看作是数据挖掘的一种方法。作为一个相对比较新的领域，目前仍然有许多种不同的数据挖掘方法，一种好的数据挖掘首先应该自动完成数据挖掘过程以排除人们主观认识对模型的影响。A. G. Ivakhnenko于1967年提出数据分组处理算法（GMDH），在此基础上逐渐形成了自组织数据挖掘的理论与方法。自组织数据挖掘方法是复杂系统从定性到定量综合集成方法的有效实现技术，其核心技术便是数据分组处理方法（GMDH），它从初始模型出发，按一定的法则产生新的中间遗传、变异模型，再经过筛选确定一个最优模型，重复这样一个遗传、变异、选择和进化的过程，使中间候选模型的复杂度不断增加，直至得到最优复杂度的模型。

四、CVaR方法

虽然VaR方法的应用已经相当广泛，其理论也已经相对比较成熟，然而任何模型都会有自己的缺点，VaR方法同样也不例外，其计算的分析方法由于基于正态性假设而受到某种程度的批评。在不满足正态性假设的情况下，VaR方法不满足次可加性和凸性，即两个金融资产组合的VaR值可能大于两个金融资产各自VaR值的和，这一点不满足分散投资组合可以降低风险的一般原则，而且当以VaR值最小作为投资组合选择的目标函数或以VaR作为约束条件时由于其不是凸函数而得不到最优解，影响投资组合的最优决策。另外当采用情景进行计算时，VaR方法不能很好的处理离散分布的情况。再者，VaR没有充分考虑极值损失的影响，虽然发生特别大的损失的概率很小，但是一旦发生其危害是很严重的。

为解决上述问题，有学者提出了CVaR的概念，CVaR是VaR的扩展，译为条件VaR或者条件风险价值，即是在一定置信水平和一定持有期内，在金融资产的损失超过VaR的条件下的期望损失。令β－VaR为在置信度和一定持有期条件下的金融资产收益变量的VaR，则CVaR可以表示为$CVaR = E(r \mid r \le \beta-VaR$。CVaR充分考虑了大于VaR值得所有损失情况，满足次可加性，因此可以用来构造投资组合的凸规划得到最优解，而且可以很好的处理离散情况的计算。这一技术产生于20世纪90年代末，Rockafellar和Uryasev于2000年的文章被认为是最早全面阐述CVaR的文献，经过几年的发展，CVaR理论已经初步完善，但是在实际应用中仍然不是很广泛，这可能与当前存在的CVaR的计算方法比较复杂有关。由于CVaR是VaR的扩展，在一定程度上比VaR具有更加良好的性质，所以，Copula理论应用到CVaR的计算中也会得到更好的效果。

五、结论

金融风险分析与风险管理伴随着金融机构对风险管理的重视正在得到不断的发展与完善，从总体形势来看，金融风险分析已经由单纯的时间序列或者金融计量学扩展到混沌、人工神经网络以及数据挖掘等跨学科的综合发展。VaR方法目前仍然在金融风险分析中占主导地位，然而VaR的不足之处也引起了相关部门机构的重视，CVaR及其它VaR的改进方法也在不断的探讨与发展中。设计多变量之间的相互关系，无论对于相关性分析还是多变量金融风险分析来说，联合正态分布的假设对分析结果的偏差也日益影响到决策的准确程度，基于Copula函数的金融风险分析方法能够更好的描述变量之间的相关性，随着Copula理论的逐步完善，其在金融风险分析中的应用也必然越来越广泛。

（作者单位：北京航空航天大学经济管理学院）

动，从而也会影响到企业年金记帐利率的变动。所以，针对这一局限性，我们需要重新来构建一个更加灵活的利率模型。

二、随机利率模型

在该模型下，我们假定 i_t 是第 t 时期的利率，这里 $t=0, 1, 2, 3, \cdots$，i_t 是一个服从某种分布的随机变量，并且任一个时期的利率都独立于前一时期的利率，它们的分布也是相同的，即独立同分布。于是，有关年金计算的一些基本变量我们就可以用随机利率 i_t 表示出来了，这里我们简要地列举两个与年金现值计算关系密切的变量：

第一个是 $a^{-1}(n)$，表示在第 n 年末支付 1 的折现值，我们有以下关系式：

$$a^{-1}(n)=(1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1}\cdots(1+i_n)^{-1}=\prod_{t=1}^{n}(1+i_t)^{-1}$$

第二个是 $a_{\bar{n}|}$，它表示每年末支付 1 的年金现值，我们同样有以下关系式：

$$a_{\bar{n}|}=(1+i_1)^{-1}+(1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1}+\cdots+(1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1}\cdots(1+i_n)^{-1}=\sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}(1+i_s)^{-1}$$

由于以上两个关系式中的 i_t 都是随机变量，因此 $a^{-1}(n)$ 和 $a_{\bar{n}|}$ 也都是随机变量，所以根据独立同分布假定以及 i_t 的具体分布类型，我们就可以计算出 $a^{-1}(n)$ 和 $a_{\bar{n}|}$ 的期望值和方差，从而对随机利率下的年金问题进行分析和预测。

三、随机利率下企业年金精算模型

在缴费预定型企业年金计划中，缴费方式有两种：一种是每个职工按照固定的数额缴纳，另一种是每个职工都按照工资的统一百分比缴纳。以下我们就第二种方式进行讨论：

假定：r 表示职工的退休年龄。

w 表示职工的寿命。

v_t 表示职工加入企业年金计划后第 t 年的贴现因子。

即：$v_t=1\setminus(1+i_t)$，这里 i_t 是职工加入企业年金计划后第 t 年的利率。

${}_tp_x$ 表示现年 x 岁的职工生存到 $x+t$ 岁的概率

$(AS)_x$ 表示现年 x 岁的职工的当前实际工资额

$(ES)_{x+t}$ 表示现年 x 岁的职工在 $x+t$ 岁时候的预期工资额

这里有：$(ES)_{x+t}=(AS)_x\cdot\frac{S_{x+t}}{S_x}$，其中 $\frac{S_{x+t}}{S_x}$ 表示 x 岁的职工在未来 t 年内的工资增长比例函数，它反映了职工工资随业绩和资历及其他因素而增长的比例。

首先，我们来计算新加入企业年金计划的现年 x 岁的职工所缴纳保费的精算现值 A，假定 c 为职工缴费占工资的比例系数，那么该职工从加入年金计划后各年缴费的精算现值如下表：

职工年龄	职工加入企业年金计划的年数	职工加入企业年金计划后各年缴纳的保费	各年缴纳的保费的精算现值
$x+1$	1	$c(AS)_x\cdot\frac{S_{x+1}}{S_x}$	$c(AS)_x\cdot\frac{S_{x+1}}{S_x}\cdot{}_1p_x\cdot v_1$
$x+2$	2	$c(AS)_x\cdot\frac{S_{x+2}}{S_x}$	$c(AS)_x\cdot\frac{S_{x+1}}{S_x}\cdot{}_1p_x\cdot v_1$
⋮	⋮	⋮	⋮
$r-1$	$r-x-1$	$c(AS)_x\cdot\frac{S_{r-1}}{S_x}$	$c(AS)_x\cdot\frac{S_{r-1}}{S_x}\cdot{}_{r-x-1}p_x\cdot v_1v_2v_3\cdots v_{r-x-1}$
r	$r-x$	$c(AS)_x\cdot\frac{S_r}{S_x}$	$c(AS)_x\cdot\frac{S_r}{S_x}\cdot{}_{r-x}p_x\cdot v_1v_2v_3\cdots v_{r-x}$

将表中第四列的数据加总，我们就可以得到职工所缴纳保费的精算现值 A，即：

$$A=\sum_{k=1}^{r-x}\left[c(AS)_x\cdot\frac{S_{x+k}}{S_x}\cdot{}_kp_x\cdot\left(\prod_{t=1}^{k}v_t\right)\right]$$

由于每年的利率是随机变量，因此职工缴费精算现值也是一个随机变量，由 i_t 独立同分布的假设我们可以得到：

$$E(A)=\sum_{k=1}^{r-x}\left[c(AS)_x\cdot\frac{S_{x+k}}{S_x}\cdot{}_kp_x\cdot\left(\prod_{t=1}^{k}E(v_t)\right)\right]$$

接着，我们再来计算职工养老金支付的精算现值：

假定职工退休后每年领取的养老金是一个固定的数额 a，沿用前面的假定，那么职工退休后每年领取的养老金的精算现值 P 如下表：

职工年龄	职工加入企业年金计划的年数	职工退休后各年领取的养老金的精算现值
$r+1$	$r-x+1$	$a\cdot{}_{r-x+1}p_x\cdot v_1v_2v_3\cdots v_{r-x-1}v_{r-x}v_{r-x+1}$
$r+2$	$r-x+2$	$a\cdot{}_{r-x+2}p_x\cdot v_1v_2v_3\cdots v_{r-x-1}v_{r-x}v_{r-x+1}v_{r-x+2}$
⋮	⋮	⋮
$w-1$	$w-x-1$	$a\cdot{}_{w-x-1}p_x\cdot v_1v_2v_3\cdots v_{r-x-1}v_{r-x}v_{r-x+1}\cdots v_{w-x-1}$
w	$w-x$	$a\cdot{}_{w-x}p_x\cdot v_1v_2v_3\cdots v_{r-x-1}v_{r-x}v_{r-x+1}\cdots v_{w-x-1}v_{w-x}$

将表中第三列数据加总，我们就可以得到职工养老金支付的精算现值，即：

$$P=\sum_{k=r-x+1}^{w-x}\left[a\cdot{}_kp_x\cdot\left(\prod_{t=1}^{k}v_t\right)\right]$$

根据独立同分布假定，我们同样可以得到：

$$E(P)=\sum_{k=r-x+1}^{w-x}\left[a\cdot{}_kp_x\cdot\left(\prod_{t=1}^{k}e(v_t)\right)\right]$$

根据前面随机利率模型的讨论，如果知道 i_t 满足何种概率分布的话，我们就可以求出 v_t 的期望值，从而我们就可以得出 $E(P)$ 和 $E(A)$ 的表达式，进而根据缴费预定型企业年金平衡原理，令 $E(P)=E(A)$，得到：

$$a=\frac{\sum_{k=1}^{r-x}\left\{c(AS)_x\cdot\frac{S_{x+k}}{S_x}\cdot{}_kp_x\cdot\left[\prod_{t=1}^{k}E(v_t)\right]\right\}}{\sum_{k=r-x+1}^{w-x}\left\{{}_kp_x\cdot\left[\prod_{t=1}^{k}E(v_t)\right]\right\}}$$

四、结论

本文主要运用保险精算学以及利息理论中的随机利率分析法，研究了缴费预定型企业年金的支付模型，分析中放开了传统模型中确定利率的假定，采用随机利率，具有一定的实用价值。但如果利率波动和时间存在关联，或者利率不满足独立同分布，而只是随意波动等等，那么模型就应该再进一步修正，究竟怎么修正就值得我们进一步的探讨。

（作者单位：厦门大学金融系）